

# Modelo didáctico de una reacción en cadena

## Teaching model of a chain reaction

BALDOMERO HERRERA-GONZÁLEZ<sup>1</sup> Y PORFIRIO ROSENDO-FRANCISCO<sup>2</sup>

Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, Instituto Literario 100, 50000 Toluca, Estado de México, México

<sup>1</sup>b.herrera@prodigy.net.mx; <sup>2</sup>rosendop@uamex.mx

### Resumen

Se propone un tratamiento sencillo del mecanismo de la reacción en cadena provocada por fisiones nucleares idealizadas, donde el número de neutrones producidos por fisión es constante. Se esquematiza la reacción en cadena, dividiéndola en eventos. Haciendo uso de la serie geométrica se obtienen expresiones matemáticas que representan datos estadísticos de interés, como el número de fisiones acumuladas y la energía total liberada. Con esto se conforma un modelo con aplicaciones fácilmente reproducible para visualizar la liberación energética por evento (Modelo II). Adicionalmente se incluye el análisis de apreciación en clase del modelo de enseñanza propuesto, en comparación con un modelo anterior del tema ampliamente difundido (Modelo I).

**Palabras clave:** reacción en cadena, fisión inducida por neutrones, serie geométrica, métodos de enseñanza.

### Abstract

A simple treatment of the chain reaction mechanism caused by idealized nuclear fissions, where the number of neutrons produced per fission is constant is proposed. The chain reaction is schematized and divided in events. Making use of the geometrical series some expressions of statistical interest are presented, such as the number of cumulative fissions and the total energy released. With these ideas, an easily reproducible model with applications is introduced to visualize the release of energy per event (Model II). In addition, the appreciation analysis in class of the proposed teaching model, in comparison with a previous and widely spread model of the topic (Model I) is included.

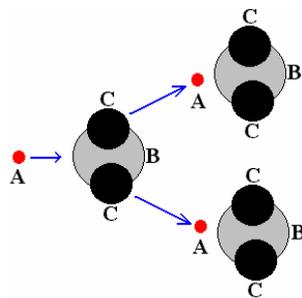
**Key words:** chain reaction, neutron-induced fission, geometrical series, teaching methods.

### INTRODUCCIÓN

Son varias las fuentes bibliográficas (SMYTH, 1945; WHITE, 1989; LAURENCE, 1980) en las que se presenta una figura clásica para explicar cómo ocurre una reacción en cadena inducida por neutrones, en ésta se indica que un neutrón será capturado por el núcleo de un elemento fisil. Posteriormente se presenta la ocurrencia de la fisión por medio de los dos fragmentos producidos. A cada fragmento se le asocian uno o más neutrones emitidos, los que a su vez vuelven a ocasionar fisiones al colisionar con otros núcleos y así sucesivamente. De aquí en adelante se identificará la figura recién descrita (Figura 1) y sus implicaciones físicas como el Modelo I, a fin de diferenciarlo del modelo alternativo para abordar el mecanismo de la reacción en cadena (Modelo II) que se presentará en detalle en la sección 2.

Es importante destacar que la selección del Modelo I, tiene que ver con el hecho de que la complejidad teórica para analizar un fenómeno como la reacción en cadena está por encima de los alcances de los cursos básicos de física. Por tanto, en la práctica se usa a dicho modelo como la opción preferente para proveer una idea a *grosso modo* del mecanismo que implica dicho fenómeno.

El Modelo II se presenta como una forma nueva de visualización para la reacción, además de ofrecer un análisis algebraico fácilmente asequible para estudiantes de ciencias básicas, análisis del que carece el Modelo I.



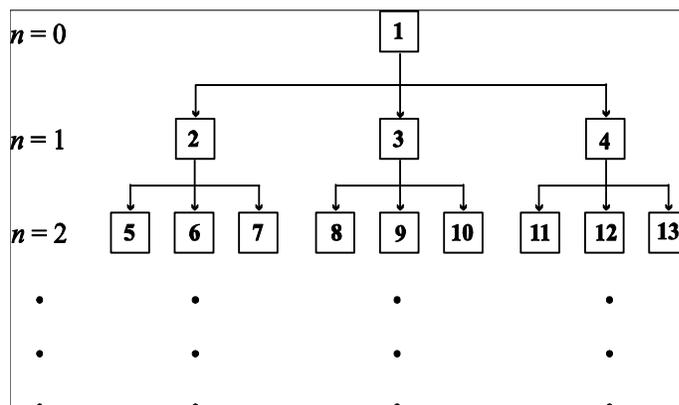
**Figura 1.** Representación visual clásica de una reacción en cadena, donde A es un neutrón y B es un núcleo que se fisiona en los fragmentos denotados con la letra C.

permitan un mejor entendimiento del fenómeno analizado, en particular ninguno ofrece una alternativa para visualizar la liberación energética aparte de la figura previamente comentada. Cabe destacar que el Modelo I tiene una amplia difusión en la Internet, desde páginas básicas de divulgación científica hasta páginas informativas de agencias gubernamentales. De forma paralela, un buen número de referencias (HIGBIE, 1980; MANLEY, 1948; RATHERGEBER, 1963; SUTTON, 1947; WHITEHEAD, 1983; MARZEWSKI, 1988; BARTLETT, 1999; PRIEST Y POTH, 1983) abordan la explicación de la fisión nuclear y la reproducción de la reacción en cadena, usando como recurso el diseño de sencillos experimentos de laboratorio. En contraste, el enfoque del Modelo II aquí propuesto, es el de ofrecer una alternativa de visualización del fenómeno tratado, desarrollada completamente a partir de bases algebraicas sencillas, que pueda ser expuesta con una cantidad mínima de materiales y recursos técnicos, sin dejar de lado las aplicaciones prácticas (sección 3) que complementan la exposición teórica del tema.

Debido a las aplicaciones tecnológicas que dependen del proceso de reacción en cadena, el problema de interés recae en la cuantificación de la liberación de energía conforme el fenómeno evoluciona. La energía liberada, por ser una cantidad escalar, no puede representarse gráficamente de manera natural, como en el caso de las cantidades vectoriales. En la siguiente sección se desarrolla un modelo teórico, partiendo del concepto matemático de la serie geométrica, que permitirá la visualización de la energía a medida que el proceso avanza.

### Modelo II para la reacción en cadena

Considérese el esquema presentado en la Figura 2, en el que cada cuadro simboliza de forma progresiva la consecución de fisiones producidas en una reacción en cadena. El número dentro de cada caja se asocia a una fisión, así, el cuadro etiquetado con el número 1 indica la primera fisión, que da origen al proceso en cadena. Cada línea que sale de las cajas representa un neutrón emitido que produce fisión al ser capturado por un nuevo núcleo del material fisible disponible. El número de neutrones liberados por fisión ( $\eta$ ) se considera constante y también se asume que cada neutrón emitido será causante de una nueva fisión. Asimismo, cada generación sucesiva de fisiones (grupos de cuadros numerados ubicados como filas horizontales), se etiqueta de arriba hacia abajo por medio de una variable llamada el número de evento  $n$ . Dicha variable puede tomar el valor de cualquier número natural, incluyendo al cero, el cual está asociado a la fisión inicial de la cadena.



**Figura 2.** División en eventos para una reacción en cadena con  $\eta = 3$ . La numeración que presentan las cajas indica el número de fisión respectivo.

Tabla 1

Número total de fisiones en función del evento  $n$  para la reacción en cadena representada en la Figura 2

Evento de fisión	Número de fisiones acumuladas
0	1
1	4
2	13
3	40
⋮	⋮
⋮	⋮
$n$	$\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$

En la Tabla 1 se muestran los datos correspondientes a las fisiones acumuladas por evento, para el caso particular presentado en la Figura 2. Como se puede notar, la suma de las fisiones hasta algún evento considerado de la reacción, conduce naturalmente a una expresión más general con la cual se puede conocer el número de fisiones acumuladas en términos de  $n$ . Esta expresión es una serie geométrica.

Tomando la construcción teórica básica de la Tabla 1, aplicándola al caso general de cualquier número de neutrones emitidos por fisión ( $\eta = 2, 3, 4, \dots$ ), se obtiene la serie geométrica correspondiente para las fisiones acumuladas  $F(n, \eta)$ , hasta el evento  $n$ -ésimo de la reacción en cadena

$$F(n, \eta) = \frac{(\eta^{n+1} - 1)}{(\eta - 1)} \quad (1)$$

Si  $\epsilon_0$  se identifica como la constante cuyo valor es aquél de la energía liberada en un proceso individual de fisión nuclear entonces, la energía total liberada hasta el  $n$ -ésimo evento de la reacción en cadena, se puede expresar a partir de (1) como

$$E(n, \eta) = \epsilon_0 \frac{(\eta^{n+1} - 1)}{(\eta - 1)} \quad (2)$$

Dividiendo (2) entre la ecuación básica para obtener el volumen de una esfera de radio  $R$ , se define una densidad de energía para la reacción en cadena  $\rho(n, \eta, R)$ , esto es

$$\rho(n, \eta, R) = \frac{3\epsilon_0 (\eta^{n+1} - 1)}{4\pi (\eta - 1) R^3} \quad (3)$$

El análisis dimensional de la densidad de energía es  $[E][L]^{-3}$ , donde  $[E]$  representa unidades de energía y  $[L]$  unidades de longitud. Con el fin de establecer una relación de proporcionalidad directa entre (2) y el volumen de una esfera se busca que  $\rho(n, \eta, R) = 1$ , es decir, que el valor de la densidad de energía sea siempre unitario, esto se logra, haciendo que el volumen de cada esfera en (3) tenga el mismo valor, en magnitud, que aquél correspondiente a la energía liberada hasta el evento considerado. Entonces, en virtud de la restricción recién establecida se tiene

$$\frac{3\epsilon_0 (\eta^{n+1} - 1)}{4\pi (\eta - 1) R^3} = 1 \quad (4)$$

Si se despeja  $R$  de (4), se obtiene el radio de la esfera asociado a la energía liberada por evento para una reacción en cadena general

$$R(n, \eta) = \left[ \frac{3\epsilon_0 (\eta^{n+1} - 1)}{4\pi (\eta - 1)} \right]^{1/3} \quad (5)$$

El MeV es la unidad por excelencia para la cuantificación energética de un fenómeno como la fisión nuclear. Dicha unidad tiene un orden de magnitud muy grande, así mismo, el valor de la energía liberada hasta un evento cualquiera dado por (2) es una función que crece exponencialmente, en contraste, los valores de  $R(n, \eta)$  tienen órdenes de magnitud mucho menores, además de la ventaja de ofrecer un esquema natural para conseguir el objetivo de visualizar y comparar la liberación energética de la reacción.

**Aplicaciones del Modelo II**

Se describen dos formas para visualizar la magnitud de la energía liberada en una reacción en cadena. La primera es un método para obtener gráficas de las esferas de liberación energética, usando soft-

ware especializado. La segunda es una extensión del método anterior para modelar las esferas, que se puede usar en demostraciones prácticas.

**Gráfica de esferas sólidas de energía liberada por evento**

En la Tabla 2 se muestran los radios obtenidos haciendo uso de (5) para los primeros seis eventos de una reacción con  $\eta = 3$  y  $\epsilon_0 = 200$  MeV (MURRAY, 1957; COTTINGHAM y GREENWOOD, 2001; BASDEVANT *et al.*, 2005).

Tabla 2

Valores (aproximados al entero más próximo) de los radios correspondientes a las esferas sólidas de energía liberada calculados para los primeros 6 eventos de la reacción con  $\eta = 3$  y  $\epsilon_0 = 200$  MeV.

$n$	$R(n,3)$ [L]
0	4
1	6
2	9
3	12
4	18
5	26

Haciendo uso del software DPGraph v. 2008.07.04 (Copyright (C) 1997-2008 by DAVID PARKER. All rights reserved), se pueden graficar las esferas correspondientes a los radios de la Tabla 2, en coordenadas esféricas, en el mismo espacio y con un efecto de transparencia en escala de grises que permite la comparación de los volúmenes respectivos (Figura 3). Esto se logra abriendo el menú [Edit] del programa y pegando en el cuadro de diálogo que se despliega el código incluido en la referencia bibliográfica 6, el cual se ofrece para descargar gratuitamente de la Internet.

Notar que en la línea final del código está la sintaxis que define los valores de los radios que establecen los tamaños de las esferas concéntricas a graficar. Estos valores se pueden modificar directamente.

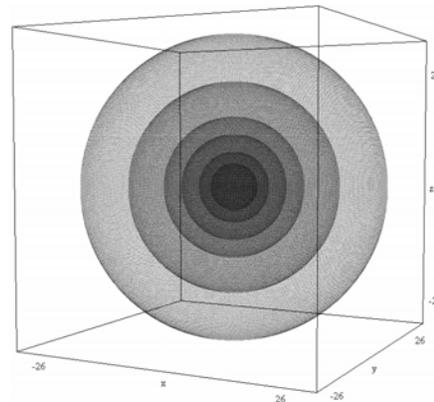


Figura 3. Representación gráfica de las esferas de energía para los datos de la Tabla 2.

**Modelado de esferas sólidas de energía**

Una vez que se tiene una serie de radios de esferas, hasta el evento de la reacción en cadena que se quiera analizar, una actividad adicional a la descrita en el apartado 3.1 es el diseño de dichas figuras en materiales como la arcilla, el poliestireno (styrofoam) o la porcelana fría (Figura 4), los cuales son fáciles de moldear y permiten la comparación no sólo del tamaño o volumen por figura, sino también de sus masas (en el caso de la arcilla o la porcelana fría).

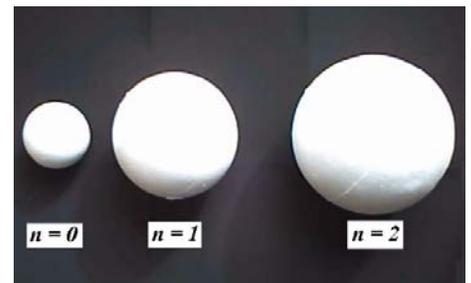


Figura 4. Esferas de energía modeladas en poliestireno para los primeros 3 eventos de la reacción en cadena de la Tabla 2. Los radios son de 4, 6 y 9 centímetros respectivamente.

La clave de la interpretación del Modelo II radica en el hecho de que (5) representa a la energía liberada por evento por medio de una esfera con volumen definido. Conforme  $n$  aumenta, también lo hace  $R(n)$ . Tomando el ejemplo de la Tabla 2, se pueden construir seis esferas con radios de 4, 6, 9, 12, 18 y 26 centímetros. La liberación energética de la fisión inicial ( $n = 0$ ) equivale entonces a una esfera de 8 centímetros de diámetro; al incluir el siguiente evento de la reacción ( $n = 1$ ), se puede considerar como si la esfera inicial hubiera crecido a una con un diámetro de 12 centímetros y así sucesivamente.

**Evaluación y comparación entre los Modelos I y II**

Para diagnosticar la apreciación de ambos modelos didácticos, se seleccionó una muestra aleatoria de 86 estudiantes de la Licenciatura de Física de la Facultad de Ciencias (Universidad Autónoma del Estado de México), con el fin de que respondieran un cuestionario (Tabla 3) donde se reflejaran sus opiniones críticas, después de presenciar una exposición en clase de los dos modelos comparados.

Las preguntas del cuestionario son cerradas y se responden de manera dicotómica, escogiendo entre los dos modelos disponibles. No se usaron preguntas abiertas para la investigación pues su análisis es más complicado y se carece del tiempo necesario para llevar a cabo un estudio con estas características, ya que tanto estudiantes como profesores sacrifican el tiempo de sus clases para participar voluntariamente en estudios como el presente.

La población total de estudiantes inscritos en la Licenciatura de Física es de 113, al momento de la aplicación del cuestionario (Mayo, 2009). La muestra escogida se compone de 40 estudiantes mujeres y 43 hombres. El número de estudiantes por grado de estudio de dicha muestra es: 34 (segundo semestre), 24 (cuarto semestre), 10 (sexto semestre) y 18 (octavo semestre). Las edades de los estudiantes evaluados oscilan entre los 19 y 23 años. Todos los estudiantes evaluados han cursado y aprobado cursos de matemáticas básicas (aritmética, geometría, álgebra) y física general.

Los estudiantes escogidos fueron instruidos para marcar con una X, el modelo que juzgaran más apropiado para cada una de las interrogantes del cuestionario; identificadas como P.1 (pregunta 1), P.2 (pregunta 2) y así sucesivamente. Cada X marcada representa una afirmación positiva a favor del modelo elegido.

Tabla 3

Formato de cuestionario usado para recabar información entre estudiantes universitarios acerca de su apreciación con respecto a los modelos de enseñanza comparados. Las X marcadas son sólo con fines de ilustración

Cuál de los modelos expuestos:	Modelo I	Modelo II
P.1 - Explica mejor el fenómeno de la reacción en cadena en general		X
P.2 - Ofrece una mejor visualización del mecanismo de la reacción	X	
P.3 - Profundiza más en detalles físicos y matemáticos sobre el tema	X	
P.4 - Es más fácil de comprender, recordar y reproducir		X
P.5 - Propondría como más adecuado para la enseñanza del tema en clase		X

**Descripción de la evaluación pedagógica**

Para iniciar, a la muestra de estudiantes se les reparten los cuestionarios con las preguntas a evaluar. A continuación, se les presenta una serie de diapositivas que describen los modelos. El primer autor de este trabajo se dedicó a esta labor, supervisado por los profesores a quienes se hace referencia en la sección de agradecimientos.

La exposición ante los estudiantes comprende una presentación en diapositivas dividida en tres partes: a) Una introducción donde se presentan los detalles conceptuales básicos para entender el concepto de fisión nuclear; b) Descripción del Modelo I, compilado de varias referencias especializadas (SMYTH, 1945; WHITE, 1989; LAURENCE, 1980);

c) Descripción del Modelo II propuesto que incluye: las ecuaciones (1-5), las Figuras 2 y 3, así como las Tablas 1 y 2. También se incluyen las aplicaciones propuestas. Al finalizar la exposición se les pide a los alumnos que marquen sus preferencias y entreguen sus cuestionarios. La presentación en diapositivas empleada, se puede descargar de la dirección de Internet que se adjunta en la bibliografía.

**RESULTADOS Y ANÁLISIS ESTADÍSTICO**

Los resultados obtenidos en la investigación estudiantil se presentan en el formato de una tabla de contingencia (Tabla 4).

Tabla 4

Preferencias de los alumnos por los modelos presentados. Cada celda indica la frecuencia de estudiantes que eligieron a cada modelo, por pregunta realizada. El número total de observaciones es de 430 (160 a favor del Modelo I y 270 a favor del Modelo II)

		Aspectos de la evaluación					
		P.1	P.2	P.3	P.4	P.5	Total
Preferencia	Modelo I	54	44	14	28	20	160
	Modelo II	32	42	72	58	66	270

La interrogante que se desea evaluar es ¿cuál de los 2 modelos para una reacción en cadena obtiene mejores impresiones por parte de la muestra estudiantil? De aquí que la variable independiente esté constituida por la preferencia por cada uno de los modelos.

Con el fin de establecer si existe una relación significativa entre los aspectos de la evaluación (variable columna) con la preferencia (variable fila), se aplica una prueba no-paramétrica para datos categóricos como los presentados: la prueba de chi-cuadrada para homogeneidad para tablas de contingencia multidimensionales. La dimensión de la Tabla 4 es 5x2, con lo cual el número de grados de libertad resulta  $df = 4$ . El valor de chi-cuadrada correspondiente es  $\chi^2 = 55.34$ . Dicho valor está por arriba de los valores críticos para los percentiles 95 y 99 ( $\chi^2_{(0.05)} = 9.49$  y  $\chi^2_{(0.01)} = 13.28$ , respectivamente). Por lo tanto, el análisis anterior permite establecer que las observaciones consideradas proveen comparaciones estadísticamente significativas en cuanto a las preferencias de los estudiantes encuestados.

Tabla 5

Porcentajes de estudiantes que votaron por los modelos presentados, en cada una de las preguntas del cuestionario aplicado

Pregunta	Modelo I (%)	Modelo II (%)
P.1	63	37
P.2	51	49
P.3	16	84
P.4	33	67
P.5	23	77

En la Tabla 5 se ofrece una compilación de los resultados de la evaluación pedagógica por medio de porcentajes. Esta tabla permite confirmar por inspección visual, las opiniones de la muestra de estudiantes. Cabe destacar que existen diversos artículos en la literatura especializada (FLORES-GARCÍA, 2009) basados en la comparación entre porcentajes para la evaluación de impresiones, preferencias o conocimientos en grupos de alumnos matriculados en cursos de física.

**DISCUSIÓN**

Se puede inferir, de acuerdo con los resultados obtenidos y el análisis desarrollado en la sección 4, que la muestra estudiantil opina:

1. Que el Modelo I explica mejor el fenómeno de la reacción en cadena en términos generales (P.1).
2. Que el Modelo II ofrece más detalles físicos y matemáticos sobre el tema (P.3); es más fácil de recordar, comprender, reproducir (P.4) y se considera como más adecuado para la enseñanza en clase (P.5).

Respecto a la preferencia de los estudiantes sobre cuál modelo ofrece una mejor visualización (P.2) los resultados no son concluyentes, ya que en esta pregunta un similar número de estudiantes votó por cada uno de los modelos.

## CONCLUSIONES

Las ecuaciones (1-5), derivadas en la sección 2 permiten una descripción sencilla del fenómeno de una reacción en cadena de fisiones nucleares. Las Tablas 1 y 2 pueden ser usadas para explicar en una mejor forma las implicaciones de las ecuaciones obtenidas.

Todo el material expuesto en este trabajo, incluyendo las aplicaciones descritas en la sección 3, se puede usar para ejemplificar el mecanismo básico que está detrás de una reacción en cadena de manera idealizada en el salón de clases. Para completar el enfoque didáctico se pueden graficar (1) ó (2) como funciones de la variable  $n$  en el plano cartesiano, para una reacción en cadena particular como la presentada en la Tabla 1.

Aunque los resultados de la evaluación pedagógica permiten concluir que el Modelo II es una alternativa preferible y más completa para la enseñanza del tema abordado, el hecho de que haya una opinión dividida en cuanto a cuál de los modelos es mejor para visualizar el fenómeno de la reacción en cadena, deja abierta la posibilidad para que el Modelo I se siga usando como una aproximación general que puede servir como una introducción simple y accesible para el tema.

## AGRADECIMIENTOS

Al Dr. FEDERICO G. GARCÍA-SANTIBÁÑEZ SÁNCHEZ por su revisión preliminar del trabajo. Al Dr. JORGE LÓPEZ-LEMUS, Dr. Juan SUMAYA-MARTÍNEZ y M., I. CARLOS R. SANDOVAL-ALVARADO por sus opiniones y validación del cuestionario aplicado a los estudiantes (comunicarse con los autores si se precisan detalles específicos al respecto y/o contacto con estos profesores).

## BIBLIOGRAFÍA

- BARTLETT, A. A., Just sixty years ago, *The Physics Teacher* **37**, (1), 30-31, 1999.
- BASDEVANT, J. -L., RICH, J. & SPIRO, M., *Fundamentals in Nuclear Physics. From Nuclear Structure to Cosmology*, Springer, New York, US, 290, 2005.
- COTTINGHAM, W. N. & GREENWOOD, D. A., *An Introduction to Nuclear Physics*, 2a. ed., Cambridge University Press, Cambridge, UK, 119, 2001.
- FLORES-GARCÍA, S. *et al.*, Student's difficulties with tension in massless strings. Part I, *Revista Mexicana de Física E*, **55**, (1), 21-33, 2009.
- FLORES-GARCÍA, S. *et al.*, Student's difficulties with tension in massless strings. Part II, *Revista Mexicana de Física E*, **55**, (1), 118-131, 2009.
- HERRERA-GONZÁLEZ, B., Presentación de los modelos de una reacción en cadena y código para graficar esferas concéntricas usando el software DPGraph, <http://www.hego.tk>, sección (Download Materials).
- HIGBIE, J., The better mousetrap: A nuclear chain reaction demonstration, *American Journal of Physics*, **48**, (1), 86-88, 1980.
- LAURENCE, G. C., *Early Years of Nuclear Energy Research in Canada*, Atomic Energy of Canada Limited (public brochure), 1980.
- MANLEY, J. H., The Mousetrap Bomb: Modification N+1, *American Journal of Physics*, **16**, (2), 119-120, 1948.
- MARZEWSKI, R., Chain Reaction Model, *The Physics Teacher*, **26**, (8), 514, 1988.
- MURRAY, R. L., *Nuclear Reactor Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, US, 5, 1957.
- PRIEST, J. & POT, J., Demonstrations for teaching nuclear energy, *American Journal of Physics*, **51**, (2), 185, 1983.
- RATHERGEBER, H. D., Mousetrap Model of Chain Reactions, *American Journal of Physics*, **31**, (1), 62, 1963.
- SMYTH, H. D., *Atomic Energy for Military Purposes*, Princeton University Press, York, US, 34-35, 1945.
- SUTTON, R. M., A Mousetrap Atomic Bomb, *American Journal of Physics*, **15**, (5), 427-428, 1947.
- WHITE, H. E., *Física Moderna*, UTEHA, México D.F., MX, **2**, 1114-1115, 1989.
- WHITEHEAD, L. A., Domino "chain reaction", *American Journal of Physics*, **51**, (2), 182, 1983.

Received: 07-08-2009 / Approved 08-05-2010